View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by UBA - FCE (E-Journals - Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires)

CUADERNOS
DEL CIMBAGE

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

UNA INTRODUCCIÓN A LAS IDEAS FUNDAMENTALES DE LA LÓGICA BORROSA A TRAVÉS DEL ARTE

Autor(es): Linares-Mustarós S., Viladevall-Valldeperas Q., Llacay Pintat T., Ferrer-Comalat J. C.

Fuente: Cuadernos del CIMBAGE, Nº 20 (Mayo 2018), pp 133-156

Publicado por: Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires.

Vínculo: http://ojs.econ.uba.ar/ojs/index.php/CIMBAGE/issue/view/173

Esta revista está protegida bajo una licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0).
Copia de la licencia: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Cuadernos del CIMBAGE es una revista académica semestral editada por el **Centro de Investigaciones en Metodologías Básicas y Aplicadas a la Gestión** (CIMBAGE) perteneciente al Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión (IADCOM).

Cuadernos del CIMBAGE N°20 (2018) 133-156

UNA INTRODUCCIÓN A LAS IDEAS FUNDAMENTALES DE LA LÓGICA BORROSA A TRAVÉS DEL ARTE

Salvador Linares-Mustarós*, Queralt Viladevall-Valldeperas**, Toni Llacay-Pintat***, Joan Carles Ferrer-Comalat****
Departamento de Empresa. Universidad de Girona
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Campus Montilivi -17071 – Girona – España
*salvador.linares@udg.edu, **fuzzyart@udg.edu, ***toni@dperramon.cat, ****joancarles.ferrer@udg.edu

Recibido 17 de diciembre de 2017, aceptado 2 de febrero de 2018

Resumen

Durante el año 2015, con motivo de la celebración de los cincuenta años de la publicación del artículo que dio lugar al nacimiento de la teoría de los subconjuntos borrosos, el museo de la Ciencia de Barcelona CosmoCaixa, en colaboración con varias universidades e instituciones catalanas, organizó una muestra expositiva sobre el desarrollo de la investigación en el campo de la teoría de la lógica borrosa durante su primer medio siglo de vida. Con la finalidad de introducir a los visitantes en los principios de las lógicas no bivalentes se presentó en la exposición una colección de obras pictóricas bajo el nombre "*FuzzyArt*", relacionada con los principios lógicos del pensamiento borroso. El presente trabajo está centrado en exponer las referencias a la teoría de la lógica borrosa que han sido fuente de inspiración para la creación de dichas obras. Paralelamente, con la finalidad de avanzar en el afianzamiento de esta teoría, se muestran diferentes posibilidades didácticas relacionadas con las obras.

Palabras clave: lógica borrosa, principios, exposición, arte.

AN INTRODUCTION TO THE FOUNDATIONS OF FUZZY LOGIC THROUGH ART

Salvador Linares-Mustarós*, Queralt Viladevall-Valldeperas**, Toni Llacay-Pintat***, Joan Carles Ferrer-Comalat****
Departamento de Empresa. Universidad de Girona
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Campus Montilivi -17071 – Girona – España
*salvador.linares@udg.edu, **fuzzyart@udg.edu, ***toni@dperramon.cat, ****joancarles.ferrer@udg.edu

Received December 17th 2017, accepted February 2nd 2018

Abstract

In 2015, to celebrate the 50th anniversary of the publication of the article that led to the birth of fuzzy sets theory, the “CosmoCaixa” Science Museum of Barcelona, in collaboration with several Catalan universities and institutions, organized an exhibition to present a sample of the research conducted in the first half century of fuzzy sets theory. In order to introduce visitors to the principles of non-bivalent logics, the exhibition displayed a collection of works of art related to the logical principles of fuzzy thinking under the name “FuzzyArt”. The aim of this article is to present those references to fuzzy logic theory that inspired the creation of said works. In parallel, in order to further consolidate the theory it also presents different ideas for using the works for teaching purposes.

Keywords: fuzzy logic, principles, exhibition, art.

1. INTRODUCCIÓN

La lógica es una ciencia formal que estudia los principios de la argumentación válida (Tymoczko y Henle, 2002). Los objetos esenciales para realizar una argumentación son las oraciones declarativas. En el sistema de la lógica clásica toda oración declarativa con sentido[1] debe o bien ser verdadera o bien, si no lo es, falsa. Aristóteles (*De interpretatione*, cap. IX) opinaba que la oración declarativa[2] "Mañana habrá una batalla naval" no podía considerarse ni verdadera ni falsa. Su razonamiento se puede resumir de la siguiente manera: si la oración en el momento de ser pronunciada es verdadera nada podrá impedir que mañana haya una batalla naval. Si es falsa viene a ser lo mismo, es decir, no habrá manera de entablar mañana una batalla naval. Aceptar pues que, en el momento de ser emitida, la oración es verdadera o falsa significaría que nuestro futuro está ya determinado desde siempre y para siempre, y esto, según Aristóteles, no tiene sentido ya que, en general, los acontecimientos futuros tienen la posibilidad de realizarse o no[3]. Este tipo de oraciones declarativas simples acerca de acontecimientos que podrían ocurrir o no ocurrir en el futuro son conocidas como "oraciones de futuros contingentes"[4]. Łukasiewicz (1920), al reflexionar sobre los futuros contingentes aristotélicos, llegaba a la conclusión de que este tipo de oraciones debían considerarse como "aún no determinadas", creando una tercera posibilidad diferente de las opciones "verdadero" y "falso". Łukasiewicz formaliza matemáticamente este pensamiento dando origen formal a la "lógica trivaluada". Poco después, el propio Łukasiewicz crea una formulación para otras lógicas que permite clasificar las oraciones en más posibilidades de las que autoriza la lógica trivaluada. Max Black (1937), admitiendo que es posible que un objeto cumpla una propiedad en un cierto grado de verdad y falsedad dentro del intervalo continuo [0,1], colocará los cimientos para la creación de un sistema lógico infinitamente multivaluado. Tres décadas después, Zadeh (1965) confecciona un contexto lingüístico en torno de la palabra "*fuzzy*" (traducida al español como "borroso" o "difuso") para designar el

[1] El hecho de exigir que tenga un sentido tiene que ver con la observación de Stuart Mill (1943) de que la oración declarativa "Abracadabra es una segunda intención", al no tener sentido, no puede ser concebida en lógica binaria ni como una oración verdadera ni como una oración falsa.

[2] En el presente documento el concepto de "oración declarativa" se considera equivalente al concepto de "proposición", "enunciado", "oración enunciativa", "sentencia" o "juicio".

[3] Para una revisión de este tema puede consultarse el artículo "Fatalismo, trivalencia y verdad: Un análisis del problema de los futuros contingentes" (Suárez, 1983).

[4] Ostalé y Pradier (2010) sugieren que sería más correcto llamarlas "oraciones de contingencias futuras"; sin embargo, dada la popularidad de la expresión "futuros contingentes" una propuesta de cambio a estas alturas parece difícil de ser aceptada.

paradigma lógico que permite asignar a cada proposición un valor de verdad dentro de un infinito continuo de opciones. Con ello, Zadeh abre las puertas a nuevas técnicas que hoy en día son utilizadas en múltiples aplicaciones industriales como, por ejemplo, los sistemas de control en el enfoque de cámaras de vídeo o en el frenado de vehículos (Terano et al., 1987; Kaufmann y Gupta, 1988; Tanaka, 1997). La teoría de Zadeh se espigó a campos tan diversos como la inteligencia artificial, la medicina, la geología o la gestión empresarial (Torra, 2007; Barro y Marín, 2001; Demicco y Klir, 2004; Kaufmann y Gil Aluja, 1986). Actualmente, los trabajos científicos relacionados con dicha teoría se pueden contar por decenas de miles.

Dado que en 2015, se cumplía medio siglo de la publicación del primer artículo que presentó la nueva teoría, el Museo de la Ciencia de Barcelona, en colaboración con la Universidad de Girona, la Universidad Rovira y Virgili, la Universidad de Barcelona, la Universidad Oberta de Catalunya, la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras, y la Sociedad Internacional de Gestión y Economía *Fuzzy*, organizó una muestra expositiva para conmemorar el evento. A partir de objetos, imágenes y experiencias, la muestra “Explora: 50 años de ideas *fuzzy*” fue diseñada con el fin de ilustrar de manera didáctica y para todos los públicos algunos de los resultados de la investigación en lógica borrosa, a la vez que se pretendía generar una reflexión sobre sus principios esenciales. Con la finalidad de lograr los propósitos anteriores, la muestra se dividió, tal y como se observa en las figuras 1 y 2, en tres secciones complementarias. En la entrada de la sala estaba ubicada la zona de descubrimiento (mesas 1 a 6, zona A). En ella se presentaron seis actividades experimentales relacionadas con conceptos de la teoría de subconjuntos borrosos (Ferrer, Bertran, Linares, Corominas, 2018), pensadas especialmente para atraer la atención de los más pequeños a la vez que se pretendía despertar la curiosidad en los mayores y prepararlos para comprender el salto paradigmático de principios lógicos en los que se basa la mencionada teoría de subconjuntos borrosos. En la segunda sección, o zona lineal científica (mesas 7 a 11, zona B), se exhibieron principalmente trabajos académicos y prácticos relacionados con la teoría de subconjuntos borrosos y con la lógica *fuzzy*. Finalmente, en la tercera sección o zona de reflexión de la idea matriz (zona C), se presentó la colección de obras pictóricas "*Fuzzy* Art" de la artista barcelonesa Queralt Viladevall. Las representaciones pictóricas de escenas cotidianas captadas por la artista intentaron mostrar, de una manera sutil y cautivadora, que la coexistencia del ser y del no ser y el principio de la simultaneidad gradual están presentes en nuestra vida diaria. Con las explicaciones de los principios de la lógica *fuzzy* a través de los cuadros se cerraban las ideas propuestas en la primera zona, mientras que las posibilidades teóricas y prácticas ya habían quedado reflejadas en la segunda.

Figura 1. Sala de exposición

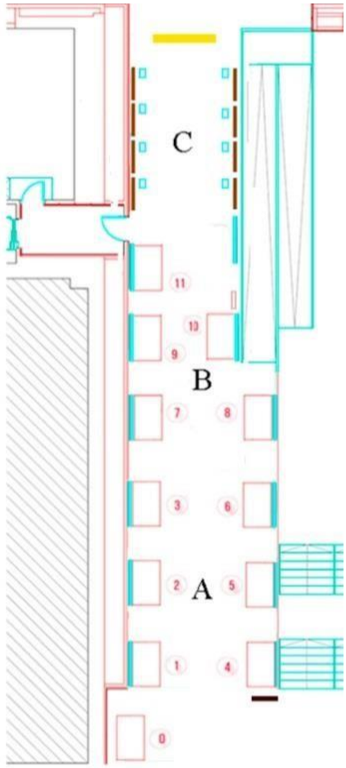

Figura 2. Croquis del sitio con las zonas y las mesas de actividades

El objetivo de este trabajo es presentar la relación existente entre las obras pictóricas de la zona C y la lógica borrosa, así como mostrar la posibilidad de trabajar didácticamente las obras. Para lograr dicho objetivo el trabajo se organiza de la siguiente manera: en primer lugar se introduce un breve apartado teórico que expone algunas de las diferencias entre la lógica bivalente y la lógica borrosa con la finalidad principal de contextualizar los principios axiomáticos de ambas teorías. A continuación, se pormenoriza la relación de cada una de las ocho obras de arte que se hallaban en la zona expositiva "*FuzzyArt*" con la lógica borrosa. Finalmente, se aporta un apartado de conclusiones y la bibliografía.

2. PRINCIPIOS DE LA LÓGICA BIVALENTE VS. PRINCIPIOS DE LA LÓGICA BORROSA

En la lógica bivalente, una proposición ha de ser necesariamente verdadera o falsa. No existe otra opción fuera de esas dos[5]. Este principio, conocido como el "principio de bivalencia", es la unión de los dos principios básicos siguientes:

P1) Principio de no contradicción. Este principio afirma que ninguna proposición puede ser verdadera y falsa a la vez. Su versión ontológica es que nada puede ser y no ser al mismo tiempo y en el mismo sentido.

P2) Principio del tercero excluido Una proposición es verdadera o es falsa, no hay una tercera posibilidad fuera de esas dos.

De las anteriores definiciones se deduce que el principio del tercero excluido asegura que toda proposición es verdadera o es falsa, pero no asegura que no existan proposiciones que sean verdaderas y falsas a la vez. Es el principio de no contradicción quien asegura que ese "o" es un "o" disyuntivo exclusivo. O bien una proposición es verdadera o bien es falsa, pero no puede ser ambas cosas a la vez.

Las lógicas multivalentes rechazan el principio del tercero excluido al admitir más valores de verdad que los tradicionales verdadero y falso. Estas lógicas tampoco admiten el principio de no contradicción. Las proposiciones pueden contener un nivel de verdad y un nivel de falsedad a la vez. El principio que rige esta afirmación en las lógicas multivalentes puede enunciarse como el "principio del ser y no ser", en relación con la negación de la versión ontológica del principio de no contradicción en que nada puede ser y no ser al mismo tiempo y en el mismo sentido.

Jaime Gil Aluja (1996), en la búsqueda de un principio que reglara el principio del ser y no ser en la lógica borrosa de Zadeh, propuso el siguiente enunciado bajo el nombre de "principio de la simultaneidad gradual": una proposición puede ser a la vez verdadera y falsa, a condición de asignar un grado a su verdad o un grado a su falsedad.

Con la finalidad de que el lector extraiga el máximo rendimiento del presente trabajo, a continuación se muestra una posible formalización matemática del concepto "valor de verdad" de las proposiciones. La formalización está basada en las ideas presentes en el artículo de Zadeh de 1965.

---

[5] El "ser o no ser" de Hamlet es seguramente el mejor ejemplo, mundialmente conocido, de enunciado que presupone aceptar que, o bien es verdad la primera de las partes, o bien lo es necesariamente la segunda.

Definición 1: Dado un conjunto de oraciones declarativas "E", se define el "valor de verdad" como la aplicación que asigna a cada oración del conjunto de oraciones declarativas un único elemento del conjunto [0,1]. Se denota dicha aplicación del siguiente modo:

$$\begin{aligned} V : E &\rightarrow [0,1] \\ x &\rightarrow V(x) \end{aligned}$$

Ejemplos:

En la lógica binaria,

$$\begin{aligned} &V : E \rightarrow [0,1] \\ &\quad x \rightarrow V(x) = \begin{cases} 1 & \text{si la afirmación x es verdadera} \\ 0 & \text{si la afirmación x es falsa} \end{cases}. \end{aligned}$$

En la lógica ternaria,

$$\begin{aligned} &V : E \rightarrow [0,1] \\ &\quad x \rightarrow V(x) = \begin{cases} 1 & \text{si la afirmación x es verdadera} \\ 0.5 & \text{si la afirmación x no es ni verdadera ni falsa} \\ 0 & \text{si la afirmación x es falsa} \end{cases}. \end{aligned}$$

En la lógica pentanaria,

$$\begin{aligned} &V : E \rightarrow [0,1] \\ &\quad x \rightarrow V(x) = \begin{cases} 1 & \text{si la afirmaciónx es completamente verdadera} \\ 0.75 & \text{si la afirmaciónx es más verdadera que falsa} \\ 0.5 & \text{si la afirmaciónx no es ni verdadera ni falsa} \\ 0.25 & \text{si la afirmaciónx es más falsa que verdadera} \\ 0 & \text{si la afirmaciónx es completamente falsa} \end{cases}. \end{aligned}$$

En la lógica borrosa de Zadeh,

$V : E \rightarrow [0,1]$

$x \rightarrow V(x)$, cualquier valor entre 0 y 1, ambos incluidos.

Desde la propuesta inicial de Zadeh, han aparecido multitud de nuevas posibilidades para definir el valor de verdad de una proposición. A título de ejemplo, el valor de verdad podría ser un intervalo cerrado incluido en el intervalo [0,1]. Dichas alternativas han ampliado la definición anterior de "valor de verdad" apareciendo todas bajo la misma etiqueta de "lógica borrosa". Paralelamente, se ha demostrado (Trillas, Alsina, Terricabras, 1995) que existen infinitas posibilidades para definir modelizaciones para la negación, la unión y la intersección de proposiciones. En el presente trabajo se definen las utilizadas por Zadeh en su artículo seminal de 1965.

Definición 2: Si una oración declarativa se puede obtener conectando una o dos oraciones declarativas con alguna de las siguientes partículas: "no" [6], "y" [7], "o" [8], entonces la primera oración declarativa es compuesta.

Para formalizar simbólicamente el conjunto de oraciones declarativas, se establecen los siguientes supuestos:

Supuesto 1: Toda oración formada a partir del conector lógico "no" aplicado a una oración declarativa es una oración declarativa que cumple el siguiente valor de verdad:

$$V(\neg x) = 1 - V(x)$$

En el caso de la lógica binaria, si la oración declarativa "A" es verdadera, entonces la oración "no A" es una oración declarativa falsa.

Supuesto 2: Toda oración formada a partir de dos oraciones declarativas conectadas o bien con el conector "y" o bien con el conector "o" es una oración declarativa que tiene el siguiente valor de verdad:

$$V(x \wedge y) = \text{Mínimo de los valores } V(x) \text{ y } V(y)$$

$$V(x \vee y) = \text{Máximo de los valores } V(x) \text{ y } V(x)$$

Observación 1: Con los supuestos constructivos de nuevas oraciones declarativas, se está asumiendo que las conectivas representan operaciones sobre oraciones declarativas con la capacidad de formar otras oraciones declarativas de mayor complejidad cuyos valores de verdad pueden ser determinados a partir de las oraciones declarativas que las construyen.

Nota 1: Pla (1991) muestra que, siguiendo una notación similar a la desplegada en el presente trabajo, en la lógica binaria la estructura de oraciones declarativas con las conexiones "no" y "y" permite obtener la conexión condicional "si..., entonces...", de la misma manera que sucede con el "o" exclusivo y el bicondicional "... si y sólo si ...". Por ejemplo, la conexión "si..., entonces...($x \rightarrow y$) " se puede conseguir de la

---

[6] El conector “no” se denomina “negación” y se representa como “$\neg$”.
[7] El conector “y” se denomina “conjunción” y se representa como “$\wedge$”.
[8] El conector “o inclusivo” se denomina “disyunción” y se representa como “$\vee$”.

construcción formativa “$y \vee \neg x$” tal y como muestra la siguiente tabla de verdad:

x	y		$y \vee \neg x$
1	1		1
1	0		0
0	1		1
0	0		1

Nota 2: Los supuestos de conexión permiten demostrar (Pla, 1991) que la lógica de enunciados posee un cálculo deductivo correcto, es completa y es decidible.

Nota 3: Sobre la base de la simbología presentada, en lógica binaria, el principio del tercero excluido y el principio de no contradicción pueden ser representados por medio de las dos expresiones siguientes:

$$V(x \vee \neg x) = 1$$

$$V(x \wedge \neg x) = 0$$

3. LAS OBRAS DE ARTE EN DETALLE

Existen numerosos ejemplos de obras provenientes del mundo de las artes: pintura, escultura, diseño gráfico, arquitectura e ingeniería, en las que se percibe la influencia científica en alguna fase de su gestación (Wagensberg et al., 2005; Moreno, 2006; Meavilla, 2007, 2016; Lazzari, 2016). Este es precisamente el caso de las obras que se presentan a continuación, todas ellas de la artista barcelonesa Queralt Viladevall. Los cuadros fueron realizados para un proyecto propio de investigación en el marco del máster en Humanidades: Arte, Literatura y Cultura Contemporáneas de la Universitat Oberta de Catalunya.

Las obras fueron ubicadas en la parte final de la exposición. Dicha zona contaba además con una pantalla de proyección en la que se mostraban fragmentos ampliados de las obras y textos que relacionaban las obras con determinados conceptos e ideas de la lógica borrosa tal y como muestra la figura 3.

Figura 3. Espacio "*FuzzyArt*"

A continuación se mostrará cada obra, se detallará su relación con la lógica borrosa y se ofrecerán diversas propuestas didácticas de ampliación que permiten hacerse una primera idea de las posibilidades pedagógicas del tema.

3.1. El perro de Pavlov. Un cuadro para comprender la dificultad de la clasificación

Figura 4. El perro de Pavlov

El cuadro, representado en la figura 4, está inspirado por una anécdota relacionada con la escuela de investigación del fisiólogo ruso Ivan Pavlov.

Ivan Pavlov fue profesor de Fisiología en la Academia Médica Imperial y director del Departamento de Fisiología del Instituto de Medicina Experimental de San Petersburgo. Pavlov formuló lo que se conocería como "condicionamiento clásico", que se basa en el estudio sobre cómo provocar ciertas respuestas a partir de estímulos previamente neutros. A título de ejemplo es muy conocido el experimento consistente en hacer sonar un metrónomo (popularmente se cree que se utilizó una campana) justo antes de dar alimento a un perro. Se llegó a observar que, cuando el perro tenía hambre, comenzaba a salivar en el mismo instante que oía el sonido del metrónomo. Su alumna, Shenger-Krestovnikova, también trabajaba con canes, condicionándolos con círculos y elipses. Cuando el perro veía un círculo sabía que le darían comida, pero si la figura se correspondía con una elipse, el animal no recibía alimento. De acuerdo con los procesos normales de discriminación, el perro aprendió a salivar cuando veía el círculo y a no salivar cuando veía la elipse. Después del condicionamiento, Shenger-Krestovnikova experimentó presentando al animal elipses bastantes circulares, haciendo así difícil la determinación de cuándo habría comida y cuándo no. En uno de esos experimentos, en el momento que la elipse adoptó una forma muy circular, algunos de los canes mostraron súbitamente un comportamiento muy extraño: aullaban, gemían, presentaban conductas destructivas... La situación de extrema incertidumbre fue para algunos de los perros demasiado estresante. Pavlov llamó a este fenómeno "neurosis experimental" y planteó la hipótesis de que las neurosis humanas[9] podrían desarrollarse de manera similar.

La obra, aparte de introducir una reflexión sobre la dificultad de ejercer la clasificación con un ejemplo histórico sobre el dilema del ser o no ser, permite meditar sobre si la dificultad de decidir si ciertos objetos cumplen o no una propiedad determinada es una cuestión meramente humana o no.

Una interesante propuesta didáctica en torno a este cuadro consiste en intentar clasificar los animales dentro de los conjuntos "animales inteligentes" o "animales no inteligentes". La búsqueda de la compleja definición de inteligencia es en sí misma un tema apasionante. Por otro lado, observar que la inteligencia es una cuestión de grado permite introducir las lógicas diferentes a la lógica del "sí" o "no".

[9] La duda patológica de un sujeto acerca del estado de limpieza de sus manos es un típico ejemplo de neurosis humana (Laín, 1984).

3.2. Las copas preparadas. Un cuadro para comprender el principio de simultaneidad gradual

Figura 5. Las copas preparadas

El cuadro titulado “Las copas preparadas”, ilustrado en la figura 5, muestra en primer plano un conjunto de copas de cristal dispuestas sobre una mesa a la espera de ser degustadas por futuros invitados.

La oración declarativa que se presta a la discusión en este cuadro es “la copa está llena[10]”.

Si se mira el cuadro según un modelo de pensamiento bivalente y se acepta que el protocolo de etiqueta marca que las copas de champán deben ser llenadas 4/5 de su capacidad, cualquier copa con contenido inferior a esa proporción tendría según la proposición un valor de verdad de “falso”. Análogamente, si se superase o igualase el nivel, el valor de verdad de la declaración sería de “verdadero”.

El pensamiento binario necesita una regla exacta para poder clasificar una oración como verdadera o como falsa.

Por ejemplo, en nuestro caso, el valor de aceptación de lleno y vacío es un valor indiscutible una vez aceptado. De lo contrario, si se acepta que la copa a la que le falta una gota de líquido para llegar a 4/5 de su capacidad es una copa llena, la copa a la que le falten dos gotas, al estar a una gota de una aceptada como llena, también debería estar

[10] En lógica binaria, se debe tener sumo cuidado ante determinadas formulaciones del tipo, si la oración declarativa “la copa está llena” es falsa, entonces necesariamente la oración declarativa “la copa está vacía” es verdadera. La proposición que niega “la copa está llena” es la proposición “la copa no está llena”. En la lógica aristotélica, se distingue entre juicios contradictorios y juicios contrarios. Dados dos juicios contradictorios, no puede darse un juicio intermedio, pero sí en cambio entre dos juicios contrarios. Por ejemplo, si se afirma "Juan es bueno" y "esta proposición es verdadera", entonces los juicios contradictorios son "Juan no es bueno" y "esta proposición no es verdadera" y no hay posibilidad de un juicio intermedio. Pero, en cambio, los juicios contrarios son “Juan es malo” y “esta proposición es falsa” y entonces sí cabe la posibilidad de otros juicios intermedios como "Juan es más o menos bueno" y "esta proposición es probablemente falsa".

llena[11]. Y así sucesivamente hasta tener una copa vacía. Lo cual provoca llegar a un enunciado absolutamente falso. Una copa vacía no puede ser una copa llena.

Por contra, el pensamiento propio de la lógica borrosa necesita, para poder otorgar un valor de verdad a una oración, dos reglas exactas. Una para conocer cuándo se puede considerar que la proposición absolutamente falsa y otra para conocer cuándo se puede considerar que es absolutamente verdadera.

Bajo el supuesto de que el valor asignado para identificar una copa vacía fuera el valor "0" y que el valor que identificara a una copa completamente llena fuera el valor "1", cada copa representada tendría asignado un valor entre 0 y 1 para establecer su plenitud. Existen diversas formas de asignar un número a este fin. Ya sea, por ejemplo, mediante el nivel del líquido desde la base, ya sea según el porcentaje de líquido que la copa contenga.

La idea de identificar que una copa medio llena es también una copa medio vacía, o que una copa poco llena está bastante vacía, permite comprender que, si se tiene un nivel de plenitud, se puede deducir el valor de no plenitud de la copa (y viceversa).

El hecho de poder tener un grado de plenitud y uno de no plenitud a la vez permite mostrar que la característica "plenitud" no sigue el principio de no contradicción, en el sentido de que se tiene un objeto que puede tener una plenitud y no tenerla al mismo tiempo y en el mismo sentido. El principio de no contradicción queda puesto en duda en este caso justificando la introducción del principio de simultaneidad gradual de Jaime Gil Aluja.

La obra puede dar lugar a la reflexión sobre que ciertas expresiones lingüísticas del tipo "es bastante valiente", "es poco importante" o "es muy feliz" demuestran que las cualidades de valentía, importancia y felicidad también pueden incumplir el principio de no contradicción.

Paralelamente, las dos plumas que aparecen en la obra son un recordatorio de que ciertas proposiciones pueden ser consideradas verdaderas en un determinado contexto y falsas en otro. Hasta que Galileo no realizó sus experimentos no cambió la creencia aristotélica que el peso de los objetos influye en la velocidad de su caída. Galileo dejó caer diferentes bolas pesadas de diferentes masas por unos planos

[11] Este tipo de razonamiento conduce a un tipo de paradoja conocida en lógica binaria como "paradoja sorites".

inclinados y comprobó que llegaban al suelo simultáneamente. El máximo exponente de este descubrimiento está presente en el famoso experimento de la caída del martillo y la pluma. En 1971, el astronauta del Apolo 15, David Scott, precipitó a la vez un martillo y una pluma sobre la superficie de la Luna. Los dos objetos llegaron a la superficie lunar al mismo tiempo.

Finalmente, el caracol que aparece en la pintura, animal hermafrodita capaz de producir tanto espermatozoides como óvulos, es un ejemplo de la idea de que ciertas afirmaciones pueden no tener sentido. Así, el enunciado “el caracol representado en el dibujo es un caracol macho” no tiene sentido desde un punto de vista de sexualidad bivalente en el que las afirmaciones “ser macho” y “ser hembra” fueran dos juicios contradictorios[12].

3.3. La vigilia del sueño entre jarrones. Un cuadro para reflexionar sobre las leyes del pensamiento

Figura 6. La vigilia del sueño entre jarrones

El principio ontológico del ser y el no ser es la base de la lógica heredada del mundo griego que ha guiado el desarrollo tecnológico hasta prácticamente el día de hoy.

Aun así, el ser y el no ser pueden cohabitar de la manera más insospechada. La figura del gato adormilado en el cuadro representado en la figura 6 sirve para ilustrar esta idea: cuando descansamos el sueño pasa por diferentes etapas. En el momento de dormirnos

[12] Merece la pena incidir en la diferencia entre juicios contrarios y juicios contradictorios. En lógica binaria, diremos que dos juicios son contrarios si no pueden ser ambos verdaderos pero los dos pueden ser falsos. También diremos que dos juicios son contradictorios si no pueden ser ambos verdaderos ni ambos falsos a la vez. Es decir, si uno es verdadero el otro debe ser falso y, viceversa, si uno es falso el otro debe ser verdadero. Observemos que, dados dos juicios contradictorios, no puede darse un juicio intermedio, pero que, en cambio, esta casuística sí puede suceder entre dos juicios contrarios. Por ejemplo, si se afirma "Juan es bueno" un juicio contradictorio es "Juan no es bueno" y no hay posibilidad de un juicio intermedio. Pero en cambio, un juicio contrario como “Juan es malo” da la posibilidad de otros juicios intermedios como "Juan es más o menos bueno" o “Juan es más bueno que malo”.

entramos en un estado de somnolencia que es una transición entre la vigilia y el sueño. Es una fase en la que podemos tener alucinaciones; podemos sentir ruidos, ver personas o, incluso, notar que nos tocan.

Por otro lado, las ramas con hojas de laurel indican la existencia de una transición entre la vida y la muerte. Esas partes del árbol empiezan a marchitarse y están dejando de ser. Los hongos que se multiplican en su superficie destruyen los tejidos. Con la descomposición, las materias minerales que el árbol ha reunido en esas hojas empiezan a liberarse y esa parte de árbol pasará del ser al no ser.

A las propuestas didácticas del estudio de las fases del sueño y de la descomposición, se les une la propuesta didáctica del estudio de la "teoría de los universos paralelos" que ofrece la repetición de objetos tipo jarrones y ramas de laurel. La teoría de universos paralelos es una de las teorías más asombrosas de los últimos tiempos. Su aceptación puede implicar la no aceptación del principio de identidad, según el cual cualquier otra entidad no puede ser idéntica a sí misma.

3.4. Las manzanas de Kosko. Un cuadro homenaje a una buena idea didáctica

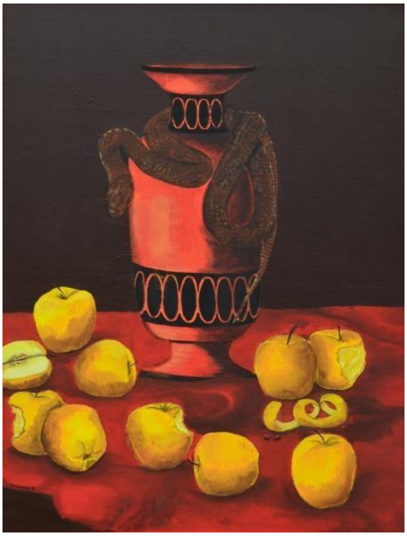

Figura 7. Las manzanas de Kosko

En la figura 7 se aprecian manzanas enteras, manzanas mordidas... Todas están en diferentes estados. Pero, ¿en qué momento una manzana mordida puede dejar de ser considerada una manzana?

Si comparamos la manzana mordisqueada con la piel de la manzana la consideramos manzana; si comparamos la manzana mordisqueada con la manzana entera ya no queda tan claro. Cada mordisco la acerca más al no ser y la aleja del ser.

Bart Kosko, en su libro *Fuzzy thinking* (1993) [13], busca la solución de la paradoja sorites desde el punto de vista de la lógica borrosa. Según su propuesta, la pregunta "¿En qué momento dejamos de tener manzana?" sería absurda porque siempre tenemos manzana, haya mucha, haya muy poca, o la tengamos en nivel o grado 0. Por lo tanto, en la lógica borrosa, los objetos o ideas pueden ser y no ser al mismo tiempo.

3.5. ¿Quién ha sido? Un cuadro que invita a conocer la teoría de la posibilidad y la historia de la creación de las lógicas multivalentes

Figura 8. ¿Quién ha sido?

El cuadro ilustrado en la figura 8 permite introducir la "teoría de la posibilidad". Esta teoría nació con la lógica borrosa y es uno de los grandes logros en los dilemas de decisión empresarial (Zadeh, 1978).

En la obra se pueden ver cuatro gatos y una copa tumbada. Nada en la actitud de los gatos sirve para responder a la pregunta de qué gato ha sido el autor del accidente.

Si lo miramos desde una perspectiva subjetiva, podríamos pensar que los que parecen más "culpables" son el anaranjado juguetón y el blanco

[13] Puede resultar muy interesante complementar la lectura del libro con el artículo de Velarde (1996), en el que se sugiere que el libro contiene un exceso de radicalización que hace caer a su autor en diversas contradicciones paradójicas.

torpe. Aunque el que se aleja de la escena y el que duerme no pueden ser descartados del todo.
Entonces sería posible que alguien definiera los siguientes valores de posibilidad:
La posibilidad de que haya sido el blanco es muy alta. Le asigno un valor de "muy posible" correspondiente a un valor numérico de 0,9.

La posibilidad de que haya sido el juguetón es muy alta. Le asigno un valor de "muy posible" correspondiente a un valor numérico de 0,9.

La posibilidad de que haya sido el dormido es muy baja. Le asigno un valor de "poco posible" correspondiente a un valor numérico de 0,2.

Finalmente, la posibilidad de que haya sido el que se va es baja. Le asignó un valor de "poco posible" correspondiente a un valor numérico de 0,4.

Se puede observar que la suma de valores es superior a 1, hecho incompatible con la teoría de probabilidades.

Dado que otras asignaciones pueden ser propuestas bajo otros puntos de vista (por ejemplo, que el gato que tiene aspecto de ser más culpable es el que se aleja de la escena del delito), el cuadro permite reflexionar sobre el hecho de que diferentes asignaciones pueden ser igual de justificables.

Otra posible ampliación didáctica en relación con la obra es la "propiedad de transparencia de los objetos". La transparencia es una propiedad óptica de la materia, que tiene diversos grados y propiedades. Un material puede ser transparente, translúcido u opaco. Una clasificación en tres etiquetas es una invitación a hablar de la lógica trivalente.

Por otra parte, en el fondo de la pintura aparece la representación de un cuadro con una batalla naval que permite introducir la famosa frase de Aristóteles sobre los futuros contingentes "Mañana habrá una batalla naval". Consiguientemente, la historia de la creación de las lógicas multivalentes está simbólicamente representada ofreciendo un agradable entorno visual para iniciar su explicación[14].

[14] El lector interesado en ampliar conocimientos al respecto puede consultar los trabajos de Velarde (1978), Zadeh (1996) y Öffenberger (1997).

3.6. ***L'heure bleue*. Un cuadro para comprender la necesidad de una lógica infinitamente multivalente**

Figura 9. L'heure bleue

En el momento del atardecer, la noche se mezcla con el día y no es de día ni de noche. Cada jornada vivimos ese instante y nunca pensamos que somos una y otra vez testigos del principio del ser y del no ser. Fotógrafos y pintores suelen denominar este momento "la hora azul" (del francés *l'heure bleue*).

El cuadro de la figura 9 está inspirado en el punto de partida de la lógica borrosa: la aceptación de que es posible que un objeto cumpla una propiedad en un cierto grado de verdad dentro del intervalo continuo [0,1].

Si aceptamos que el momento antes de la puesta del Sol es de día en grado 1 y que en el momento de la más completa oscuridad es de día en grado 0; entonces, cada instante del atardecer tiene asignado un valor dentro del intervalo continuo del 0 al 1.

3.7. Persona indecisa. Un cuadro para discutir sobre las carencias de las etiquetas

Figura 10. Persona indecisa

En el cuadro ilustrado en la figura 10 una persona mira con indecisión tres platos de fruta sin elegir ninguno. Parece una chica hermosa con una larga cabellera. Sin embargo, observándola más detenidamente, se puede constatar que posee un rostro muy masculino.

Existen noticias de personas que han cambiado dos o tres veces de sexo y todavía no se sienten bien consigo mismas. Esto demuestra que hay casos en los que a un sujeto le resulta imposible decidir si es hombre o mujer.

Una anécdota muy ilustrativa sobre lo absurdo que puede resultar tener que ser etiquetados en esta clasificación es la de la fotógrafa británica Dayanita Singh, que escribió sobre su amistad con la jisra Mona Ahmed y las diferencias entre las sociedades de ambas: "Cuando le pregunté si le gustaría ir a Singapur para hacerse una operación de cambio de sexo me dijo: 'Realmente no lo entiendes. Yo soy del tercer sexo, no soy un hombre intentando ser una mujer. Es problema de tu sociedad que sólo reconozca dos sexos."

Y es que algunas doctrinas hinduistas contemplan la existencia del "tercer sexo", que considera que hay personas que no son ni totalmente femeninas ni totalmente masculinas sino una combinación de ambos en diferentes proporciones; existen varios grupos englobados en el tercer sexo, y el jisra es uno de los más extendidos en la India.

3.8. Tragicomedia. Un cuadro homenaje a la idea de la vaguedad

Figura 11. Tragicomedia

Inmersas en rojo aparecen en el cuadro ilustrado en la figura 11 dos máscaras que recuerdan al teatro griego. Una está riendo alegremente y la otra está riendo tristemente. Ambas se unen en una palabra: "tragicomedia". La convivencia de la tragedia y de la comedia, del dolor y de la alegría, una convivencia paradójica.

El predominio del rojo en este cuadro no es casual. Es una clara referencia al artículo "Vagueness", en el que Bertrand Russell (1923) reflexionaba sobre la vaguedad del color rojo. Russell consideraba que la asignación de la palabra "rojo" a un color no es biunívoca sino que hay muchos colores que reciben este nombre y reconoce que hay tonos que no sabemos si llamar "rojo" o no, puesto que el alcance real del término puede llegar a ser muy difícil de concretar. A partir de la anterior reflexión, Russell habla de los "conceptos vagos" y comenta que la ley del tercero excluido es verdadera cuando se emplean símbolos precisos pero no es verdadera cuando los símbolos son vagos.

A nivel didáctico, el cuadro prepara al visitante para hablar del mundo de la vaguedad, de las paradojas[15] y de la figura de Bertrand Russell.

[15] Existen multitud de artículos y libros sobre las paradojas. A título de ejemplo se puede consultar los trabajos de Gardner (1981), Sorensen (2007) y Smullyan (2007).

6. CONCLUSIONES

En el transcurso del presente trabajo se han detallado las ideas asociadas y las posibilidades didácticas de ocho obras pictóricas presentadas en una muestra expositiva conmemorativa de los primeros 50 años del nacimiento de la lógica *fuzzy*. Dichas obras brindaron claros ejemplos de que una propiedad puede estar presente parcialmente y que nuestro pensamiento acepta la idea de continuidad. La presentación de ejemplos artísticos fue clave para que el visitante del museo aceptara el paso de la función de verdad de la lógica clásica, basada en los valores identificados con "0" o "1", a la función de verdad de la teoría de la lógica borrosa, con valores definidos en el intervalo continuo [0,1].
Por otra parte, aunar ciencia y arte permitió que los visitantes del museo se enfrentaran a conceptos matemáticos sin ningún tipo de prejuicio. El hecho de haber entrelazado formulaciones con representaciones pictóricas de escenas cotidianas permitió despertar un mayor interés hacia una exposición que pretendía construir un puente entre la teoría de la lógica borrosa y la sociedad.

Finalmente, queremos destacar el mérito de que las obras artísticas hayan formado parte de una de las primeras exposiciones mundiales sobre la teoría de lógica borrosa presentadas en un museo de ciencias. Dado que dichos museos están caracterizados por ser espacios dedicados a proporcionar estímulos a cualquier ciudadano en favor del conocimiento científico, el método científico y la opinión científica, la presentación para un público general de la teoría de la lógica borrosa en dicha exposición brindó la oportunidad de divulgar las ideas científicas del profesor Zadeh.

BIBLIOGRAFÍA

Aristóteles, *De Interpretatione*. (Trad. García Suárez, A.; Velarde Lombraña, J. (1977). Cuadernos Teorema, Valencia).

Barro, S.; Marin, R (2001). *Fuzzy logic in medicine*, Physica-Verlag.

Black, M. (1937). "Vagueness. An Exercise in Logical Analysis". *Philosophy of Science*, Vol. 4 (4), pp. 427-455.

Demicco, R.; Klir, G. (2003). *Fuzzy Logic in Geology*, AcademicPress.

Ferrer, J.C., Bertran, X., Linares, S., Corominas D. (2018). *Six Experimental Activities to Introduce the Theory of Fuzzy Sets*. In: Berger-Vachon C., Gil Lafuente A., Kacprzyk J., Kondratenko Y., Merigó J., Morabito C. (eds) Complex Systems: Solutions and Challenges in

Economics, Management and Engineering. Studies in Systems, Decision and Control, vol 125. Springer, Cham.

García Suárez, A. (1983). "Fatalismo, trivalencia y verdad: un análisis del problema de los futuros contingentes". *Anuario filosófico*. Vol. 16 (1), 307-329.

Gardner, M. (1981). *Paradojas que hacen pensar*. Ediciones Labor. Barcelona.

Gil Aluja, J. (1996) "Lances y desventuras del nuevo paradigma de la teoría de la decisión". *Actas III Congreso SIGEF* Vol. 1, 2.10. Buenos Aires

Kaufmann, A.; Gil Aluja, J. (1986). *Introducción de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos a la Gestión de las Empresas*. Editorial Milladoiro, Santiago de Compostela.

Kaufmann, A.; Gupta, M.M. (1988). *Fuzzy Mathematical Models in Engineeringand Management Science*. ElsevierScience Publisher, The Netherlands.

Kosko, B. (1993). *Fuzzy thinking: The New Science of Fuzzy Logic.* Hyperion books.

Lain, P. (1984). *Antropología médica para clínicos*, Salvat, Barcelona.

Lazzari, L.; Moulia, P.; Gervasoni, A. (2016). "Aportes de las il·lusiones ópticas a diferentes campos del conocimiento". *Cuadernos de Cimbage*, Vol. 18, pp. 81-107.

Łukasiewicz, J. (1920). "O logice trójwartościowej". *Ruch Filozoficzny*. Vol. 5, pp. 170-171. (Trad. en Deaño, A. (1970). *Estudios de lógica y Filosofia*. Revista de Occidente, Madrid).

Meavilla, V. (2007). *Las Matemáticas del arte: inspiración ma(r)temática*. Almuzara, Córdoba.

Meavilla, V. (2016). *El arte de las matemáticas: Los principios matemáticos a través de la pintura*. Editorial Guadalmazán. Córdoba.

Moreno, P. (2006). *Anda con ojo*. Factorıa K de Libros. Vigo.

Mill, J. (1843). *A system of logic, ratiocinative and inductive, being a connected view of the principles of evidence, and the methods of scientific investigation*. Harrison & Co., London.

Öffenberger, N. (1997). La prehistoria de la lógica polivalente en la antigüedad clásica. (Trad. Alberto Ranea, G. Editorial Alejandro Korn, Córdoba.

Ostalé, G. J., & Pradier, S. A. (2010). "Los futuros contingentes en Roberto Grosseteste, con una traducción inédita de su De veritate propositionis". *Revista Internacional de Filosofía*, Vol. 3, pp. 29-38.

Pla Carrera, J. (1991). *Lliçons de lógica matemática.* Promociones y Publicaciones Universitarias PPU. Barcelona.

Russell, B. (1923). "Vagueness". *The Australasian Journal of Psychology and Philosophy*, 1(2), 84-92.

Smullyan, R. (2007). *¿ Cómo se llama este libro?*. RBA.

Sorensen, R. (2007). *Breve historia de la paradoja: la filosofía y los laberintos de la mente*. Tusquets, Barcelona.

Tanaka, K. (1997). *An Introduction to Fuzzy Logic for Practical Applications*. Springer-Verlag, Berlin.

Terano, T.; Asai, K.; Sugeno, M. (1987). *Fuzzy systems theory and its apllications*. AcademicPress, Boston.

Torra, V. (2007). *Fonaments d'Intel·ligència artificial*, Fundació UOC.

Trillas, E.; Alsina, C.; Terricabras, J. (1995). *Introducción a la lògica borrosa*, Ariel, Barcelona.

Tymoczko, T.; Henle, J. (2002). *Razón, dulce razón: una guía de campo de la lógica moderna*. Ariel, Barcelona.

Velarde, J. (1978). "Lógica polivalente". *El basilisco*. Vol 1, pp. 93-99.

Velarde, J. (1996). "Pensamiento difuso, pero no confuso: de Aristóteles a Zadeh (y vuelta)". *Psicothema*. Vol 8 (2), pp. 435-446

Wagensberg, J.; Landsberg, P.T.; Herralde, G.; Ascott, R.; Zeki, S.; Gómez, I.; Prakinson, G. López, M. (2005). *Dalí: noves fronteres de la ciència, l'art i el pensament*. Generalitat de Catalunya Departament de cultura.

Zadeh, L.A. (1965). "Fuzzy sets". *Information and Control*, Vol. 8, pp. 338-353.

Zadeh, L.A. (1978). "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility". *Fuzzy Sets Syst*. Vol. 1 (1), pp. 3–28.

Zadeh, L.A. (1996). "Nacimiento y evolución de la lógica borrosa, el soft computing y la computación con palabras: un punto de vista personal". *Psicothema*. Vol 8 (2), pp. 421-429.